

Franco Zavatti

PROVE DI LABORATORIO

per

ESPERIMENTAZIONI DI FISICA I

Corso di Laurea in Astronomia

a.a. 2006-2007

INDICE

Note di elaborazione dati	2
Inquadramento storico della teoria degli errori	5
Minimi quadrati	8
Bilancia	11
Calorimetro	20
Densimetro	24
Geiger	27
Banco ottico	32
Tavola con le aree sottese dalla Distr. Normale	37
Sistema Internazionale (SI) delle unità di misura	38

NOTE DI ELABORAZIONE DATI

Fare una misura vuol dire fornire, tramite un qualsiasi strumento, **due** numeri: la misura stessa e l'incertezza con cui si conosce il suo valore. Come abbiamo visto con il pendolo di Kater, una serie di misure della stessa grandezza fornisce sempre (o quasi sempre) risultati diversi. Si assume come valore più probabile della grandezza il valore medio, calcolato sui dati sperimentali. Se facciamo n misure della grandezza x , e cioè x_1, x_2, \dots, x_n , il valore più probabile è

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

A questo valore associamo sempre una indicazione della dispersione dei risultati che chiamiamo **deviazione standard** e definiamo come:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum \xi^2}{n-1}}$$

Durante il corso vedremo il perchè, ma per ora affermiamo che il risultato di una serie di misure, dato nella forma:

$$(\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}) \text{ unità di misura}$$

indica a chiunque lo legga che, ripetendo la misura, il 68.2 risultati dovrà essere compreso tra i valori $(\bar{x} + \sigma_{\bar{x}})$ e $(\bar{x} - \sigma_{\bar{x}})$. Se si vuole che l'incertezza (la chiameremo normalmente **errore di misura** o semplicemente errore) indichi qualcosa di diverso da quanto stabilito sopra, lo si deve scrivere esplicitamente. Quando forniamo il risultato di una misura, lo facciamo scrivendo un certo numero di cifre (ad esempio 28.4 m; 125.36 mm; 3685 Kg; 0.00365 A): approssimiamo, cioè, la misura "vera" della grandezza con un certo numero di **cifre certe**. Chiamiamo **cifre significative** le cifre che compongono il numero, contate a partire dalla prima cifra di sinistra diversa da zero. Negli esempi sopra, il numero delle cifre certe è 3, 5, 4, 5 e il numero di quelle significative è 3, 5, 4, 3, rispettivamente.

ERRORE ASSOLUTO ED ERRORE RELATIVO

Il σ che abbiamo definito sopra (la deviazione standard) viene detto **errore assoluto** in quanto ha la stessa unità di misura del valore trovato e rappresenta in termini assoluti la dimensione dello sparpagliamento dei risultati. Il rapporto tra errore e valore della grandezza è detto invece **errore relativo** e rappresenta percentualmente quante volte l'errore è minore del risultato. L'errore relativo è

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{\bar{x}}, \text{ che si indica anche } \frac{\Delta \bar{x}}{\bar{x}}.$$

- Usiamo l'errore relativo per renderci conto di cosa stiamo facendo: se misuriamo (32 ± 3) metri, abbiamo un errore relativo di circa il 10% e possiamo dedurre subito che stiamo sbagliando misura (il 10% è inaccettabile misurando oggetti con lunghezza di metri o decine di metri). Se invece misuriamo (3250 ± 3) m, pur avendo lo stesso errore assoluto, commettiamo un errore dell'1 per mille (0.1%), compatibile con questo tipo di misura.

- Usiamo l'errore relativo anche per mescolare gli errori tra loro e per definire l'errore con cui si conosce una grandezza, noto l'errore di grandezze connesse alla prima, misurate a parte. Infatti, se misuriamo due grandezze, una con $\epsilon_r = 80\%$ e l'altra con $\epsilon_r = 0.1\%$, l'errore relativo di una terza grandezza legata alle prime due, è fortemente influenzato dall'errore relativo più grande. Se si volesse calcolare l'area di un rettangolo misurando un lato con il palmo della mano, sarebbe inutile misurare l'altro lato con un calibro. L'errore con cui si conoscerà l'area sarà dato dalla "precisione" dello strumento più impreciso (il palmo della mano, in questo caso).

In un caso come questo, detto **propagazione degli errori**, l'errore sulla grandezza derivata (si supponga che sia $D = A \cdot B$) si ricava da:

$$\sigma_D = \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial A}\right)^2 \cdot \sigma_A^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial B}\right)^2 \cdot \sigma_B^2}$$

Quindi, una grandezza $D = f(m_1, m_2, \dots, m_n)$, dopo aver misurato le m_i , avrà un valore $(D \pm \sigma_D)$ u.m.. Se si hanno errori di misura sufficientemente piccoli da poter essere trattati come differenziali ($\sigma_D = \Delta D$), si potrà *prima* calcolare il logaritmo di D e *poi* il suo differenziale (*differenziale logaritmico*). Questo procedimento è molto veloce e tanto più preciso quanto più piccolo è l'errore relativo.

Esempio: Sia $D = a \cdot b \cdot c$, con i valori misurati di a, b, c dati da: $(a \pm \sigma_a)$ u.m.; $(b \pm \sigma_b)$ u.m.; $(c \pm \sigma_c)$ u.m. Allora è $\log D = \log a + \log b + \log c$ e il differenziale:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$$

Se si possono confondere i Δ con le quantità finite σ , ogni termine dell'equazione precedente rappresenta l'errore relativo delle grandezze misurate. Si può quindi calcolare l'errore relativo della grandezza derivata. L'errore assoluto σ_D , che qui si confonde con ΔD si calcola moltiplicando il $\Delta D/D$ trovato per D . Bisogna sottolineare che il differenziale logaritmico è un sistema veloce e impreciso per calcolare gli errori di grandezze derivate. Ha il vantaggio di calcolare gli errori relativi e quindi permette di sapere subito se si stanno compiendo errori grossolani.

ERRORI SISTEMATICI

Quando tutte le misure sono affette da una deviazione costante, dovuta ad esempio ad un punto zero sbagliato o ad una parallasse, si dice che sono soggette ad un *errore*

sistematico. Se ci si accorge di aver commesso un errore di questo tipo e si riesce a determinarne la grandezza, è molto facile correggere le misure. In ogni caso l'errore sistematico agisce su tutte le misure nello stesso modo.

A questo tipo di errore è associato il concetto di *accuratezza* della misura.

ERRORI CASUALI

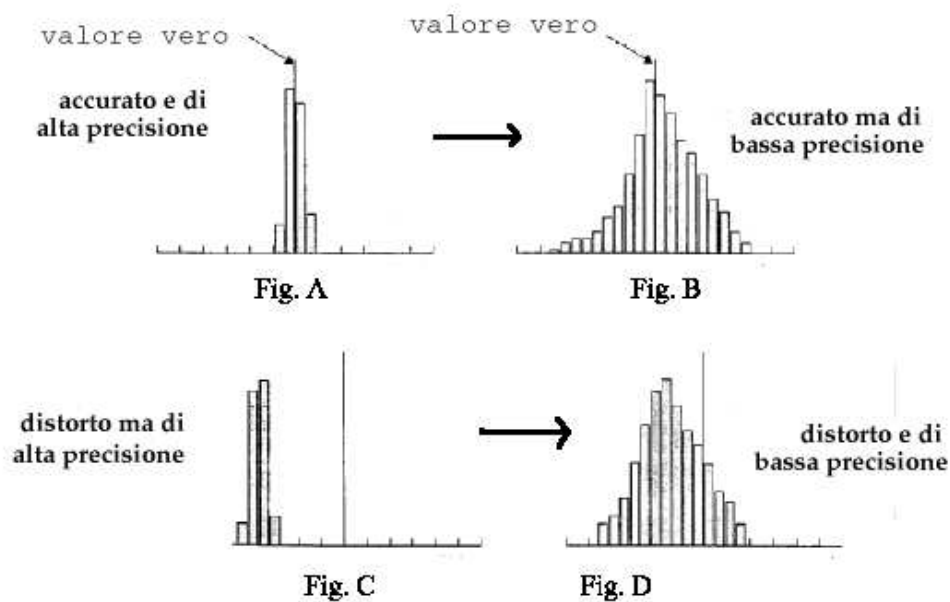
Gli errori più difficili da controllare sono detti *casuali* e sono quelli che rendono imprevedibile il risultato di una misura; lo rendono cioè *aleatorio* e da trattare con metodi probabilistici. Questi errori dipendono da molte piccole cause, variabili nel tempo e nello spazio.

A questo tipo di errore è associato il concetto di *precisione* della misura.

Spesso, come errore di misura su una singola osservazione, viene data la sensibilità dello strumento, intesa come la più piccola divisione della scala.

Un esempio di cosa significano precisione e accuratezza nella distribuzione dei dati sperimentali viene presentato nella figura successiva, tratta da:

Charles J. Krebs del 1999 (*Ecological methodology*, 2nd ed. Menlo Park, CA, Cummings, pp. XII, 620),



Inquadramento storico della Teoria degli Errori

da: Michel Armatte - *Erreurs et moyennes - Les cahiers de Science e Vie*, n.48, dic. 1998

La scienza moderna ha realizzato progressi tramite l'errore e quindi non deve meravigliare se la teoria degli errori ha giocato un ruolo importante nel suo sviluppo. La rivoluzione scientifica dei secoli XVII^o e XVIII^o si può riassumere nella frase di Galileo: *"La filosofia è scritta in questo immenso libro che è sempre aperto davanti a noi, voglio dire l'Universo È scritta nella lingua matematica e i suoi caratteri sono i triangoli, i cerchi e le altre figure geometriche, senza le quali è impossibile comprenderne il discorso."*

Alla fine di questi secoli il "libro della Natura" è ormai l'unica autorità del sapere "vero" e sostituisce le Sacre Scritture e i libri dei filosofi dell'antichità.

La frase di Galileo, che possiamo considerare una raccomandazione sul metodo scientifico, e che viene riproposta dai fondatori del metodo sperimentale Hobbes, Locke, Boyle e da Bacon, fondatore del metodo induttivo, impiega più di un secolo per farsi strada e per portare alla rivoluzione newtoniana. Questo ritardo è essenzialmente dovuto a due cause: la prima è la "lingua matematica" che necessita di una comprensione profonda prima di poter essere applicata e che richiede una semplificazione dei fenomeni fisici ai quali viene applicata. L'altra causa è che non esistono due persone che "leggono" il libro della Natura nello stesso modo: fare un'osservazione, discutere di un fatto, produrre un enunciato è, ogni volta, una costruzione soggettiva che dipende dall'equazione personale dell'osservatore, dalla bontà dei suoi sensi e degli strumenti, dalle condizioni sempre particolari dell'osservazione, dalle nozioni precedenti e dalla predisposizione dell'osservatore.

Rendere queste osservazioni un fatto "oggettivo", cioè un fatto sociale riconosciuto dalla comunità scientifica, richiede una serie di regole, di convenzioni e di istituzioni che sono alla base della scienza moderna.

Il trattamento degli errori di osservazione è un aspetto fondamentale di questa "socializzazione" delle deduzioni individuali. Il progresso della strumentazione non elimina la necessità del trattamento degli errori, semmai la accresce.

L'origine della teoria degli errori è situata al crocevia di due problemi fondamentali per la scienza: l'affidabilità delle osservazioni e l'affidabilità dei modelli matematici, tramite dati sperimentali sempre più precisi, richiede un'analisi degli errori di misura sempre più sofisticata. La teoria degli errori si esercitò ai suoi inizi, tra gli anni 1720 e 1730, nella determinazione della lunghezza di un grado di meridiano al polo e all'equatore. La conoscenza di questa lunghezza era in grado di risolvere la controversia tra chi riteneva la Terra schiacciata all'equatore (i Cassini, l'Accademia Reale francese) e chi pensava che fosse schiacciata ai poli (Newton, Huygens ...). In questo caso giocarono

un ruolo fondamentale gli errori sulle misure di lunghezze e di angoli necessarie nelle varie triangolazioni.

Un altro campo di esercitazione della teoria degli errori fu, nel XVIII^o secolo, la cartografia e in particolare la determinazione della longitudine in mare. Vennero offerti premi faraonici a chi fosse stato in grado di determinarla con una precisione sufficiente. In mancanza di orologi abbastanza precisi, si era costretti ad usare tavole di posizione della Luna, nelle quali un errore di 2' (primi d'arco) portava un errore di 3° sulla longitudine (cioè un po' più di 300 km!) con le conseguenze economiche e politiche facilmente immaginabili.

Il lavoro matematico sugli errori di misura cominciò poco prima della metà del XVIII^o secolo.

Per "errore di misura" si intendeva la parte "ineliminabile" e "inspiegabile", dopo che fossero stati tolti tutti gli effetti, detti "sistematici", dovuti all'osservatore, allo strumento o alla teoria. Solo con il calcolo differenziale fu possibile valutare l'effetto, su un certo risultato, degli errori sulle grandezze che lo compongono. Questo calcolo fu introdotto da Cotes, un allievo di Newton.

L'errore dR di un risultato R , funzione di tre variabili, $R=F(X,Y,Z)$, è, secondo Cotes:

$$dR = \frac{\partial F}{\partial X}dX + \frac{\partial F}{\partial Y}dY + \frac{\partial F}{\partial Z}dZ$$

Una conseguenza di questa formula è che l'errore dM sulla media $M=(X+Y+Z)/3$ di tre osservazioni X,Y,Z sarà $dM=(dX+dY+dZ)/3=dX$ se le misure hanno errori uguali. I geometri dell'epoca, però, si accorsero subito che la realtà era diversa: la formula rappresentava l'errore sulla media *solo se si usavano gli errori massimi* (3σ).

Quando si usa la media, il suo errore è sempre più piccolo degli errori componenti e la probabilità di avere sempre errori massimi è veramente molto bassa.

Molti (da Laplace a Lagrange, a Bernoulli) si chiedevano quale fosse il vantaggio di combinare diverse osservazioni nella media, se il suo valore non era più preciso di quello delle singole componenti.

Nel precedente calcolo di Cotes mancava ogni elemento aleatorio nell'errore che veniva trattato in modo deterministico. Al contrario, la teoria delle probabilità, inventata da Pascal, Huygens e Bernoulli nel XVI^o secolo, si adattò perfettamente al trattamento degli errori visti come variabili aleatorie, tanto che fu possibile dimostrare [da parte di Simpson] che l'errore sulla media di n osservazioni era sempre più piccolo dell'errore sulle singole misure.

A questo punto restava da determinare quale media si dovesse utilizzare come valore vero della grandezza: era preferibile la media aritmetica, usata dagli astronomi, come valore migliore, senza distorsioni e con l'errore più piccolo oppure una media pesata

(ma con cosa?), una mediana (il valore intermedio) o una moda (valore più frequente) potevano essere migliori?

Una risposta di tipo matematico a questi interrogativi richiedeva un'ipotesi sulla legge di distribuzione degli errori; una volta fatta l'ipotesi, però, quali criteri usare per definire la media migliore? Il principio di massima verosimiglianza (massimizzare la probabilità delle osservazioni) o la combinazione degli errori tramite una funzione (ma quale?) da minimizzare?

Si impiegarono 50 anni per uscire da questi dilemmi. La soluzione venne dalle "misure indirette" con il **metodo dei minimi quadrati**, proposto da Legendre nel 1805. Questo metodo consiste nello scegliere come migliore soluzione quella che rende minima la somma dei quadrati delle differenze tra i dati osservati e la legge calcolata. Non c'è però nessuna giustificazione ai minimi quadrati: solo nel 1809 Gauss li giustificherà in termini del principio di massima verosimiglianza, accoppiato ad un'ipotesi di legge degli errori del tipo e^{-x^2} (esponenziale in $-x^2$).

Nel 1810 Laplace giustifica l'esistenza della legge (detta Gaussiana o normale) e^{-x^2} tramite il teorema limite centrale.

MINIMI QUADRATI

Data una serie di punti sperimentali y_i ($1 \leq i \leq m$) e **assegnata** una dipendenza funzionale con la variabile indipendente x_i ($1 \leq i \leq m$), i parametri a_j ($1 \leq j \leq n$) che definiscono questa dipendenza si possono trovare con il **metodo dei minimi quadrati**. Una stima dei parametri "corretta" si ottiene rendendo **minima la somma dei quadrati dei residui**, essendo i *residui* le differenze r_i tra i dati osservati e i dati calcolati, alla stessa ascissa, tramite la relazione funzionale scelta.

Supposta una dipendenza polinomiale, la relazione tra gli y_i e gli x_i è

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 + \dots + a_nx_1^{n-1} \\ y_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 + \dots + a_nx_2^{n-1} \\ y_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 + \dots + a_nx_3^{n-1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m = a_1 + a_2x_m + a_3x_m^2 + \dots + a_nx_m^{n-1} \end{cases} \quad (8.0)$$

Limitandosi alla dipendenza parabolica, i residui r_i sono dati da:

$$\begin{cases} r_1 = a_1 + a_2x_1 + a_3x_1^2 - y_1 \\ r_2 = a_1 + a_2x_2 + a_3x_2^2 - y_2 \\ r_3 = a_1 + a_2x_3 + a_3x_3^2 - y_3 \end{cases}$$

Perchè la somma dei quadrati dei residui sia minima, dovrà essere nulla la sua derivata rispetto ai parametri a_j :

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \sum_{i=1}^m (r_i)^2 = 0 \quad (8.1)$$

cioè

$$r_1^2 = a_1^2 + a_2^2x_1^2 + a_3^2x_1^4 + y_1^2 + 2a_1a_2x_1 + 2a_1a_3x_1^2 - 2a_1y_1 + 2a_2a_3x_1^3 - 2a_2y_1x_1 - 2a_3y_1x_1^2$$

e le analoghe espressioni per i restanti residui. Allora la somma dei quadrati dei residui è:

$$\sum_{i=1}^m r_i^2 = ma_1^2 + a_2^2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_3^2 \sum_{i=1}^m x_i^4 + \sum_{i=1}^m y_i^2 + 2a_1a_2 \sum_{i=1}^m x_i$$

$$+2a_1a_3 \sum_{i=1}^m x_i^2 - 2a_1 \sum_{i=1}^m y_i + 2a_2a_3 \sum_{i=1}^m x_i^3 - 2a_2 \sum_{i=1}^m y_i x_i - 2a_3 \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 \equiv F$$

e la (8.1) diventa:

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2ma_1 + 2a_2 \sum_{i=1}^m x_i + 2a_3 \sum_{i=1}^m x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^m y_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_2} = 2a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + 2a_1 \sum_{i=1}^m x_i + 2a_3 \sum_{i=1}^m x_i^3 - 2 \sum_{i=1}^m y_i x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_3} = 2a_3 \sum_{i=1}^m x_i^4 + 2a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + 2a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 - 2 \sum_{i=1}^m y_i x_i^2 = 0.$$

Dividendo per 2 e ordinando secondo le a_j :

$$\begin{aligned} a_1 m + a_2 \sum_{i=1}^m x_i + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^2 &= \sum_{i=1}^m y_i \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^3 &= \sum_{i=1}^m y_i x_i \\ a_1 \sum_{i=1}^m x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^m x_i^3 + a_3 \sum_{i=1}^m x_i^4 &= \sum_{i=1}^m y_i x_i^2. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Il sistema lineare (8.2) può essere espresso, con il formalismo matriciale, da $\mathbf{A}\mathbf{a}=\mathbf{d}$, in cui \mathbf{A} è una matrice ($n \times n$) e \mathbf{a} e \mathbf{d} sono due vettori di dimensione n , la cui soluzione è

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d} \quad (8.3)$$

con A^{-1} inversa della matrice A

La matrice di covarianza del vettore dei parametri \mathbf{a} è data da:

$$cov(\mathbf{a}) = A^{-1} \cdot s^2 \quad (8.4)$$

dove s^2 è la stima della varianza dei residui

$$s^2 = \frac{1}{\nu} \sum_{i=1}^m (Osservato - Calcolato)^2$$

essendo i *gradi di libertà* ν dati dal numero dei dati meno il numero dei parametri (cioè $i - j$).

Da notare che spesso viene indicata l'espressione $cov(\mathbf{a}) = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \cdot s^2$ in cui \mathbf{C} corrisponde ai coefficienti del sistema (8.0). $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ equivale al processo che dalla (8.1) porta alla (8.3) e quindi la matrice \mathbf{A} qui riportata è uguale alla $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$.

Uno dei casi più frequenti di utilizzo dei minimi quadrati e l'unico che si presenta durante le prove di laboratorio è quello della relazione lineare. In questo caso il sistema (8.22) diventa di due equazioni nelle due incognite a_1 e a_2 e può essere utilizzato come esempio per uno sviluppo completo delle formule.

La matrice dei coefficienti \mathbf{A} è allora (con \sum si intenderà d'ora in poi $\sum_{i=1}^m$):

$$A = \begin{vmatrix} m & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{vmatrix}, \quad (8.5)$$

e la sua inversa è:

$$A^{-1} = \frac{1}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & -\sum x_i \\ -\sum x_i & m \end{vmatrix}. \quad (8.6)$$

Le componenti del vettore soluzione dato dalla (8.3) sono:

$$a_1 = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum y_i x_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \quad (8.7)$$

$$a_2 = \frac{m \sum y_i x_i - \sum x_i \sum y_i}{m \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}.$$

Per il calcolo di σ_{a_1} e σ_{a_2} bisogna fare riferimento alla (8.4).

Definendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, Eq.(8.6), gli errori sui parametri sono:

$$\sigma_{a_1} = \sqrt{B_{11} \cdot s^2} \quad (8.8)$$

$$\sigma_{a_2} = \sqrt{B_{22} \cdot s^2} \quad (8.9)$$

con B_{ii} elementi diagonali della matrice \mathbf{B} .

BILANCIA

La bilancia è uno strumento che dà l'uguaglianza tra due masse tramite l'uguaglianza tra due pesi, fornendo risultati *indipendenti dall'accelerazione di gravità*.

La bilancia per analisi, o analitica è mostrata in Fig.1.1

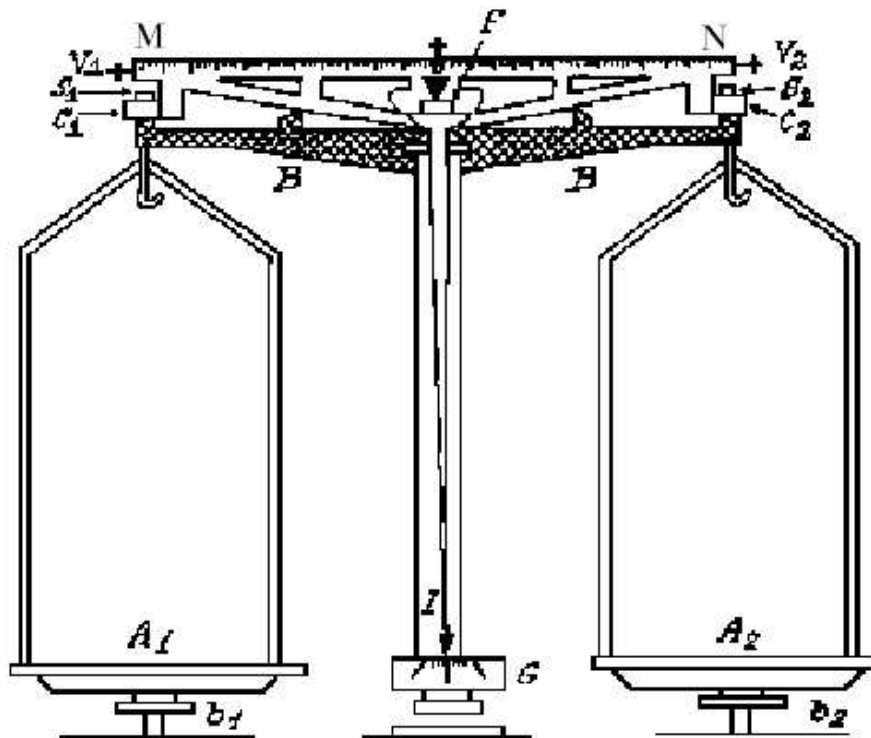


Fig.1.1 - Bilancia analitica

Il fulcro F è uno spigolo di coltello in acciaio appoggiato su un piano molto duro. Il piano definisce un asse orizzontale intorno al quale il giogo MN può ruotare praticamente senza attrito, almeno per angoli piccoli. Il giogo è costruito in modo da avere allo stesso tempo massima leggerezza e massima rigidità.

Agli estremi del giogo si trovano i coltelli C_1 e C_2 che, appoggiati ai piani S_1 e S_2 , reggono i piatti A_1 e A_2 .

La bilancia è dotata di blocco per poter diminuire la pressione dei coltelli sui piani e per aggiungere pesi.

Nella costruzione di una bilancia si pone cura al parallelismo fra i tre coltelli F , C_1 e C_2 e alla distanza tra il fulcro e i due coltelli che portano i piatti.

Quando la bilancia oscilla attorno al fulcro, i due piatti si muovono verticalmente mentre l'indice I oscilla sulla scala graduata G intorno ad una certa posizione. Se

questa posizione (detta *di equilibrio*) coincide con lo zero della scala si dice che la bilancia è **equilibrata**. Per pesare correttamente non è necessario avere la bilancia equilibrata, ma in ogni caso l'equilibratura si può fare tramite le viti V_1 e V_2 .

Come ogni altro strumento di misura, una bilancia deve essere **precisa** (a volte, con lo stesso significato, si dice **fedele**), nel senso che l'indice deve assumere la stessa posizione ogni volta che sui piatti vengono posti i medesimi pesi. La **precisione** di una bilancia dipende, eliminati gli attriti, dalla **costanza della forma geometrica del giogo** e dal **parallelismo tra i coltelli**. È intuitivo che in mancanza di parallelismo l'equilibrio dipende dalla posizione dei pesi sui piatti in quanto viene generata una coppia il cui braccio dipende dalla posizione dei pesi.

Con riferimento alla Fig.1.2, sia $\overline{C_2C_2}$ il coltello che porta uno dei piatti e P il peso sul piatto. Il punto di applicazione di P dipenderà a sua volta dalla posizione del carico sul piatto e quindi il momento $P \cdot \overline{NH}$ dipenderà da \overline{NH} che, se i due coltelli non sono paralleli, dipenderà a sua volta dalla posizione del carico. Siccome l'equilibrio della bilancia è determinato dall'uguaglianza dei momenti, ne deriva che **senza parallelismo la bilancia non è fedele**.

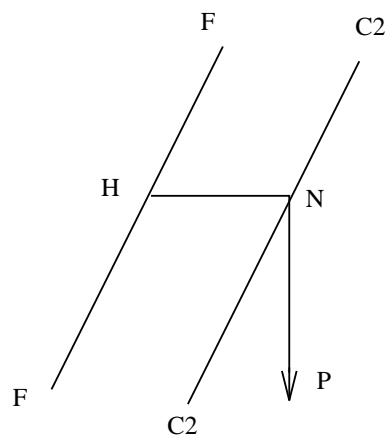


Fig.1.2

Per avere un'idea della precisione richiesta nel parallelismo tra i coltelli, si supponga che la bilancia sia sensibile a carichi di 0.1 mg su un carico totale di 200 g e che i suoi bracci siano lunghi 10 cm.

Perché la sensibilità sia compatibile con la precisione occorre che gli errori dovuti a spostamenti di un carico di 200 g sui piatti siano inferiori all'effetto di un sovraccarico di 0.1 mg. Posto quindi $\Delta P = 0.1$ mg e definita $\Delta \overline{NH}$ come la variazione di braccio dovuta a mancanza di parallelismo, dovrà essere

$$P \cdot \Delta \overline{NH} < \overline{NH} \cdot \Delta P$$

cioè

$$\Delta \overline{NH} < \overline{NH} \cdot \frac{\Delta P}{P}$$

o, in numeri

$$\Delta \overline{NH} < 10 \text{ cm} \cdot \frac{10^{-4} \text{ g}}{200 \text{ g}} = \frac{10^{-3}}{200} \text{ cm}$$

$$\Delta \overline{NH} < 0.05 \mu \text{ (o } 5 \cdot 10^{-6} \text{ cm)}$$

da cui, ammettendo una lunghezza del coltello di 1 cm, si deduce che l'angolo tra i coltelli deve essere minore di $5 \cdot 10^{-6}$ radianti $\simeq 1''$.

Un precisione di questo genere nel parallelismo è impensabile, per cui *bisogna mettere i pesi nello stesso punto del piatto*.

Si dice che una bilancia è **giusta** quando, aggiungendo masse uguali sui suoi piatti l'equilibrio rimane inalterato. Perchè ciò avvenga è necessario che i bracci siano uguali: ad una bilancia di laboratorio si richiede una precisione di una parte su due milioni (0.1 mg su 200 g) e questo significa (i calcoli sono come quelli appena fatti) che i due bracci devono essere uguali a meno di 0.05μ , il che è impossibile essendo sufficienti piccole variazioni di temperatura per provocare differenze di lunghezza di questo ordine. Quindi le bilancie di laboratorio non possono essere giuste.

La **sensibilità** di una bilancia si definisce come il più piccolo carico che provoca uno spostamento apprezzabile dell'indice, ma questa definizione è ovviamente troppo soggettiva. Più correttamente la sensibilità σ è il rapporto tra l'angolo α di cui ruota il giogo per effetto di un carico, e il carico Δm stesso

$$\sigma = \frac{\alpha}{\Delta m} \quad rad \, mg^{-1}.$$

In pratica α si misura in divisioni sulla scala e Δm in mg e quindi $[\sigma] = [div \, mg^{-1}]$. A volte come sensibilità si usa l'inverso $1/\sigma$ in $[mg \, div^{-1}]$.

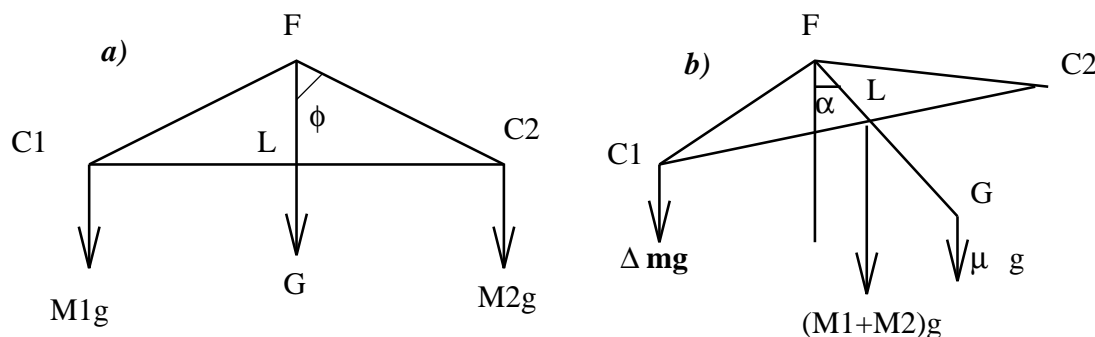


Fig.1.3- Sensibilità

La sensibilità si può esprimere in funzione di grandezze caratteristiche della bilancia: si supponga che i bracci non siano allineati ma formino tra loro un angolo $2\phi \simeq 180^\circ$. I piatti siano caricati con due masse M_1 e M_2 , tali che la bilancia sia in equilibrio quando il baricentro del giogo G si trova sulla verticale che passa per F (Fig. 1.3a). In questo caso la risultante di M_1g e M_2g è applicata a L . Se si aggiunge un sovraccarico Δm si avrà una nuova posizione di equilibrio (Fig. 1.3b) con l'asse \overline{FG} del giogo (di massa

μ) che forma con la verticale un angolo α diverso da zero. Il valore di α si ricava imponendo che la somma dei momenti delle forze sia nulla:

$$(M_1 + M_2)g\overline{FL} \sin\alpha + \mu g\overline{FG} \sin\alpha - \Delta m g \overline{C_1F} \sin(\phi - \alpha) = 0$$

α sarà in generale piccolo, per cui $\sin(\phi - \alpha) \simeq \cos\alpha \simeq 1$ e $\sin\alpha = \alpha$. Allora:

$$(M_1 + M_2)\overline{FL}\alpha + \mu\overline{FG}\alpha - \Delta m \overline{C_1F} = 0$$

oppure

$$\alpha[(M_1 + M_2)\overline{FL} + \mu\overline{FG}] = \Delta m \overline{C_1F}$$

e quindi

$$\sigma = \frac{\alpha}{\Delta m} = \frac{\overline{C_1F}}{(M_1 + M_2)\overline{FL} + \mu\overline{FG}}$$

o anche, indicando la lunghezza dei bracci con l e le masse con M ($M_1 = M_2 = M$),

$$\sigma = \frac{l}{\mu\overline{FG} + 2M\overline{FL}}.$$

Come si vede, la sensibilità dipende dall'abbassamento dei coltelli dei piatti (\overline{FL}), cioè dall'allineamento dei coltelli. Solo se \overline{FL} è nullo la sensibilità è indipendente dal carico. Le bilance sono in genere costruite in modo che \overline{FL} sia negativo a piatti scarichi (cioè i bracci flettono verso l'alto).

La sensibilità dipende anche dalla distanza \overline{FG} fra il fulcro e il baricentro del giogo e può esser modificata agendo sulle viti V (v. Fig.1). Allargando le viti la sensibilità diminuisce.

• Per $\overline{FL} = 0$ e \overline{FG} costante, σ dipende dal rapporto l/μ . Per ragioni costruttive $\mu \propto l^2$ e quindi σ è proporzionale all'inverso della lunghezza: *le bilance più sensibili hanno i bracci più corti possibile.*

— o — — o — — o —

• • *Fedeltà e sensibilità sono due concetti contrastanti: infatti una bilancia fedele dà sempre la stessa posizione dell'indice (a parità di peso), ma sappiamo che le fluttuazioni casuali esistono. Se non le osserviamo (quindi fedeltà) significa che la bilancia è poco sensibile.*

— o — — o — — o —

Nel corso delle varie prove di laboratorio verranno usati due sistemi per pesare:

Metodo della tara— Sul piatto destro si pone il corpo da pesare; sull'altro piatto si mette la *tara* (pallini di piombo) di massa leggermente superiore al corpo da pesare. Sul piatto destro si aggiungono pesi tarati fino all'equilibrio (posizione n), poi si toglie

il corpo incognito e si aggiungono pesi tarati fino all'equilibrio (posizione n' , in genere diversa da n). Il peso sarà dato allora dalla *somma dei pesi tarati aggiunti* $\pm (n' - n)/\sigma$ perchè bisogna tenere conto della sensibilità in funzione del carico.

Metodo della doppia pesata— Si pone il corpo da pesare, di massa X su uno dei piatti e sull'altro pesi campione di massa totale M in modo da avere equilibrio. Se L_1 e L_2 sono le lunghezze dei bracci, l'uguaglianza dei momenti darà

$$XL_1g = ML_2g.$$

Si invertono poi le posizioni del corpo e dei pesi tarati e quasi sicuramente non ci sarà più equilibrio; per riaverlo bisognerà *aggiungere* o *togliere* una piccola massa m . In questo caso i momenti saranno

$$(M + m)L_1g = XL_2g.$$

Dalle due equazioni si ricava

$$X^2 = M(M + m) \quad \text{o} \quad X = M\sqrt{1 + \frac{m}{M}}$$

Nell'ipotesi che $m \ll M$, sviluppando in serie binomiale (1)

$$X = M \left(1 + \frac{m}{2M}\right) = M + \frac{m}{2} = \frac{2M + m}{2}$$

Prova di laboratorio

Viene usato il metodo della tara.

Si calcolano

- 1)- la sensibilità della bilancia,
- 2)- la massa,
- 3)- la densità di un corpo geometricamente semplice.

Il materiale a disposizione consiste in

- bilancia analitica
- pesiera con pesi tarati da 20 g a 10 mg
- cilindretto metallico (peso incognito)
- pallini di piombo di varie dimensioni (tara)
- calibro

1) Sensibilità

Si determinano due posizioni di equilibrio:

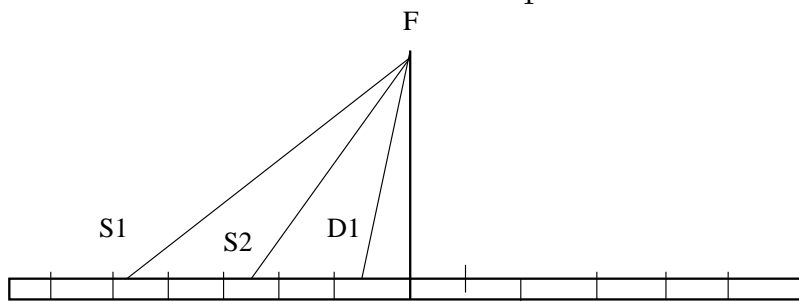
- la prima con lo stesso peso sui piatti.

$$(1) (1 + x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 \dots$$

- la seconda con un peso da 10 mg aggiunto ad uno dei piatti.

Tutte le posizioni di equilibrio si calcolano con la formula

$$n = \frac{S1 + S2 + 2D1}{4} \quad \text{divisioni,} \quad (1.1)$$



dove S1, S2, D1 sono il numero di divisioni sulla scala definite, rispettivamente, dalla prima oscillazione a sinistra, dalla seconda oscillazione a sinistra e dalla prima oscillazione a destra, contate a partire dalla divisione centrale, assumendo il segno negativo per le divisioni a sinistra e positivo per quelle a destra. Ad esempio, nella figura precedente sarà: $S1 = -4.5 \pm 0.5$; $S2 = -2.5 \pm 0.5$; $D1 = -0.5 \pm 0.5$, da cui si ricavano, **per ogni peso**, n_1 (stesso peso) e n_2 (10 mg in più).

L'operazione si ripete per i vari pesi sui piatti.

Assumendo che l'errore di misura su S1, S2, D1 sia 1/2 di divisione, l'errore su n è, per la propagazione degli errori:

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{32}} = 0.306 \text{ divisioni.} \quad (1.2)$$

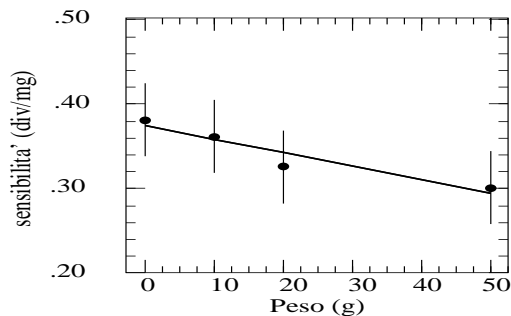


Fig.1.4- Sensibilità in funzione del carico

La sensibilità (che viene qui indicata con il simbolo \underline{s} per evitare confusioni con l'errore) sarà:

$$s = \frac{|n_2 - n_1|}{\Delta m} \quad \text{div/mg} \quad (1.3)$$

e

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{\sigma_{n_2}^2 + \sigma_{n_1}^2}{(\Delta m)^2}} \simeq 0.043 \text{ div/mg}. \quad (1.4)$$

Il risultato è quindi $(s \pm \sigma_s) \text{ div/mg}$ per ogni peso. Ripetendo l'operazione per diversi carichi si otterrà l'andamento della sensibilità in funzione del carico.

Dato che anche per il peso incognito bisognerà usare l'opportuna sensibilità, sarà necessario determinare i parametri k e z della retta $s = z + kP$, mostrata in Fig.1.4, che meglio interpola i dati sperimentali. Questi parametri ed i loro errori si determinano con il metodo dei minimi quadrati.

2) Massa

Come detto, si usa il *metodo della tara* che consiste nelle seguenti operazioni:

- 1)-Sul piatto destro si pone il corpo da pesare; sull'altro piatto si mette la *tara* (pallini di piombo) di massa leggermente superiore al corpo da pesare.
- 2)-Sul piatto destro si aggiungono pesi tarati (p_1) fino all'equilibrio (posizione n), poi si toglie il corpo incognito e si aggiungono pesi tarati (p_2 in totale) fino all'equilibrio (posizione n' , in genere diversa da n). La massa sarà data allora da

$$m = (p_2 - p_1) \pm \frac{|n' - n|}{s} \quad \text{grammi} \quad (1.5)$$

dove la sensibilità è stata trasformata in *div/grammo*. Da notare che il termine $\pm \frac{|n' - n|}{s}$ è una correzione che si apporta al termine $(p_2 - p_1)$ (il peso approssimato del corpo incognito), in funzione della posizione dell'indice nelle due pesate precedenti. Infatti, se le posizioni n' ed n sono diverse, vuol dire che l'insieme *pesi tarati* sul piatto destro pesa di più o di meno dell'insieme *pesi tarati + corpo incognito*.

- Se i pesi tarati pesano **più** dei pesi+corpo, il peso del corpo deve essere corretto (*diminuito*) di un peso che corrisponde alla differenza di posizione ($n' - n$), tenendo conto della sensibilità della bilancia al peso (p_2). La correzione sarà quindi negativa.

- Se i pesi tarati pesano **meno** dei pesi+corpo, la correzione sarà positiva.

L'errore sulla massa è

$$\sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma_{n'}^2 + \sigma_n^2}{s^2} + \frac{(n' - n)^2}{s^4} \sigma_s^2} \quad (1.6)$$

in quanto gli errori sui pesi tarati sono trascurabili.

3) Densità

Si misurano con il calibro (precisione $1/20 \text{ mm} = 0.05 \text{ mm}$) il diametro \underline{d} e l'altezza \underline{h} del peso incognito.

Il volume del corpo è quindi

$$V = \pi d^2 h / 4$$

con errore

$$\sigma_V = \frac{\pi d}{4} \sqrt{4h^2 \sigma_d^2 + d^2 \sigma_h^2}$$

e la densità è

$$\rho = \frac{m}{V} \quad [g/cm^3] \quad (1.7)$$

con errore

$$\sigma_\rho = \frac{1}{V} \sqrt{\sigma_m^2 + \frac{m^2}{V^2} \sigma_V^2}. \quad (1.8)$$

NONIO

Il nonio è costituito da un regolo graduato che può scorrere lungo una scala: è diviso in modo che N divisioni del nonio corrispondano ad $N - 1$ divisioni della scala. Se d è la larghezza di una divisione della scala, una divisione del nonio sarà larga:

$$n = \frac{N - 1}{N}d$$

e la **differenza** tra una divisione della scala e una del nonio sarà:

$$\frac{N - N + 1}{N}d = \frac{d}{N}.$$

Se lo zero del nonio, che è l'origine della scala, coincide con una divisione della scala, le altre divisioni (1,2,3,...) resteranno indietro di d/N , $2d/N$, $3d/N$... rispetto alle corrispondenti graduazioni della scala, e si dovrà avanzare lo zero del nonio della stessa quantità per far coincidere con esso la 1.a, la 2.a, la 3.a divisione.

Quindi, se ad esempio la settima divisione del nonio coincide con una divisione della scala, la misura sarà data dalla divisione immediatamente precedente allo zero del nonio, a cui si somma la quantità $7d/N$.

Nel **calibro**, il nonio è lungo 19 mm divisi in venti parti (nonio ventesimale); sarà allora $d/N = 1 \text{ mm}/20 = 0.05 \text{ mm}$. Questa è anche la *sensibilità* del calibro.

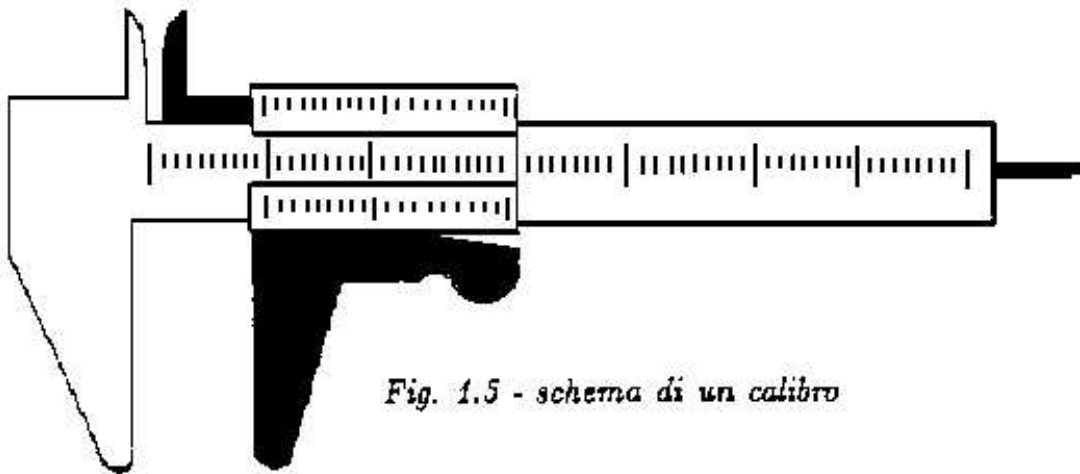


Fig. 1.5 - schema di un calibro

CALORIMETRO

Il calorimetro è uno strumento per misurare *quantità di calore* ed è costituito da un vaso posto in un recipiente a pareti adiabatiche. Nel vaso è contenuto un liquido, solitamente acqua, in cui sono immersi un agitatore e il bulbo di un termometro. Il termometro è preciso al decimo di grado.

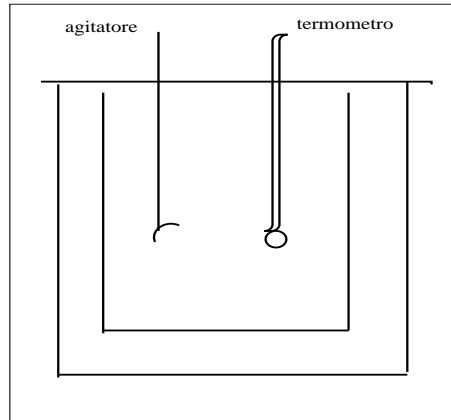


Fig.2.1- Calorimetro delle mescolanze

La relazione esistente tra la quantità di calore Q [$Kcal$] ceduta ad (o sottratta da) un corpo e la variazione della sua temperatura $\Delta t = t_2 - t_1$ è data da:

$$Q = K(t_2 - t_1). \quad (2.1)$$

K è la **capacità termica**, la quantità di calore necessaria per alzare di $1^\circ C$ la temperatura di un corpo [$Kcal^\circ C^{-1}$].

La capacità termica dipende dalla temperatura del corpo ed è direttamente proporzionale alla sua massa

$$K = m \cdot c(t) \quad (2.2)$$

con $c(t)$ **calore specifico**, la quantità di calore necessaria per alzare di $1^\circ C$ la temperatura di una massa unitaria [$KcalKg^{-1}^\circ C^{-1}$].

Il calorimetro usato nella prova di laboratorio è detto delle mescolanze, ed è adatto alla misura del calore specifico di un corpo solido non solubile in acqua.

Se un corpo a temperatura t_c viene immerso in acqua a temperatura $t_a < t_c$, il calore passa dal corpo all'acqua fino al raggiungimento della temperatura di equilibrio. In assenza di dispersione con l'esterno, la quantità di calore Q ceduta dal corpo è uguale a quella ricevuta dall'acqua e dagli accessori a suo contatto.

Una volta per tutte si misura il calore assorbito dagli accessori e si trasforma la misura in grammi d'acqua aventi la stessa capacità termica degli accessori. Questa quantità viene detta **equivalente in acqua del calorimetro**, π , ed è nota al momento dell'esperienza. La quantità di calore assorbita dall'acqua è

$$Q = c_a(m_a + \pi)(\theta - t_a), \quad (2.3)$$

mentre quella ceduta dal corpo è

$$Q = c_x m_c (t_c - \theta). \quad (2.4)$$

essendo θ la massima temperatura raggiunta dall'acqua dopo l'immersione del corpo. Dall'uguaglianza tra la (2.3) e la (2.4) si ricava il calore specifico del corpo (quello dell'acqua è uguale ad $1 \text{Kcal}/[\text{Kg} \cdot ^\circ \text{C}]$)

$$c_x = \frac{(m_a + \pi) \cdot (\theta - t_a)}{m_c(t_c - \theta)} \quad [\text{Kcal}/(\text{Kg} \cdot ^\circ \text{C})] \quad (2.5)$$

Prova di laboratorio

Si chiede di misurare il calore specifico di un corpo solido.

Si hanno a disposizione:

- Calorimetro delle mescolanze
- Bilancia con relativi pesi tarati
- Termometro al grado, per acqua bollente
- Cronometro al decimo di secondo
- Fornello elettrico
- Corpo incognito
- Staffa metallica per sollevare il corpo

Per il calcolo si usa l'eq.(2.5):

$$c_x = \frac{(m_a + \pi) \cdot (\theta - t_a)}{m_c(t_c - \theta)}.$$

La varianza del calore specifico è data da:

$$\begin{aligned} \sigma_{c_x}^2 &= \frac{(\theta - t_a)^2}{m_c^2(t_c - \theta)^2} \sigma_{m_a}^2 + \left[\frac{(t_c - t_a)(m_a + \pi)}{m_c(t_c - \theta)^2} \right]^2 \sigma_{\theta}^2 \\ &+ \left[\frac{\theta - t_a}{m_c(t_c - \theta)} \right]^2 \sigma_{\pi}^2 + \left[\frac{m_a + \pi}{m_c(t_c - \theta)} \right]^2 \sigma_{t_a}^2 \\ &+ \left[\frac{(m_a + \pi)(\theta - t_a)}{m_c^2(t_c - \theta)} \right]^2 \sigma_{m_c}^2 + \left[\frac{(m_a + \pi)(\theta - t_a)}{m_c(t_c - \theta)^2} \right]^2 \sigma_{t_c}^2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

e l'errore da

$$\sigma_{c_x} = \sqrt{\sigma_{c_x}^2}$$

Nelle equazioni precedenti il significato delle costanti è

m_a = massa dell'acqua = massa del (vaso + acqua) - massa del vaso

m_v = massa del vaso

m_c = massa del corpo

t_a = temperatura dell'acqua quando viene introdotto il corpo

t_c = temperatura del corpo = temperatura dell'acqua quando bolle

θ = massima temperatura nel calorimetro dopo l'introduzione del corpo caldo.

π = equivalente in acqua del calorimetro = $(34 \pm 5)g$.

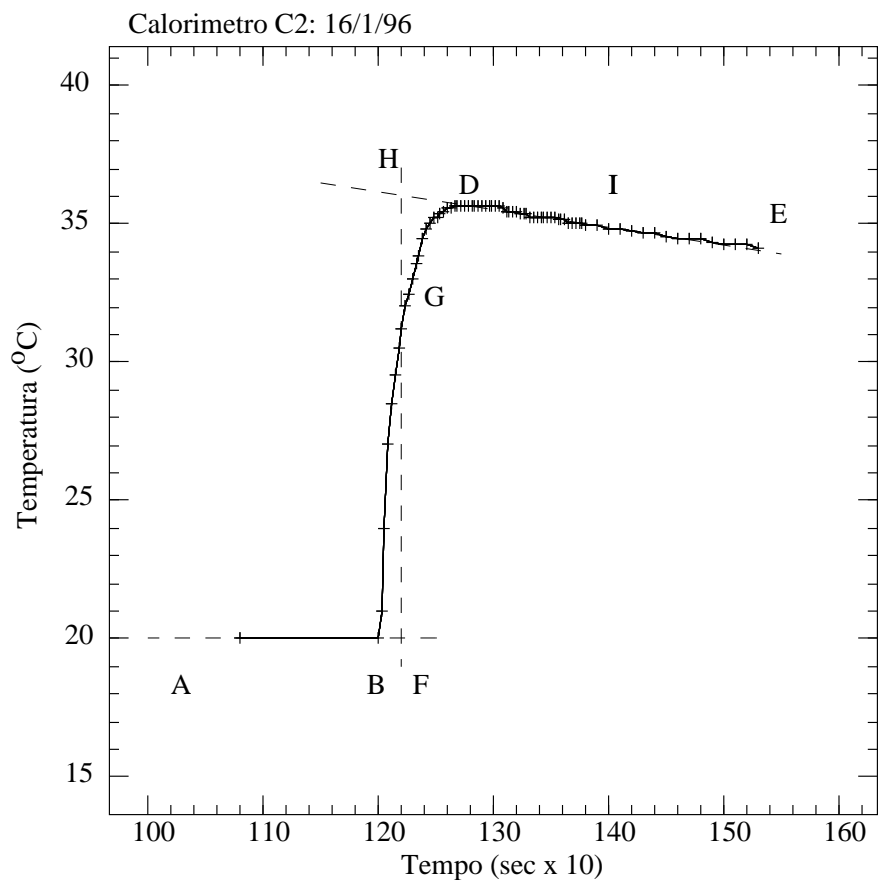


Fig.2.2 - Temperatura in funzione del tempo.

La prova si svolge come segue:

1) si pesa il corpo con il metodo della **doppia pesata** e si ricavano

$$m_c = \frac{1}{2}(m'_c + m''_c)$$

$$\sigma_{m_c} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma_{m'_c}^2 + \sigma_{m''_c}^2}$$

- 2) Si pesa il vaso calorimetrico come in 1) e si ricavano m_v, σ_{m_v} .
- 3) Si versa nel calorimetro acqua sufficiente a coprire il corpo e si pesa l'insieme, determinando m_t e σ_{m_t} . Allora $m_a = m_t - m_v$; $m_a = m_t - m_v$ e $\sigma_{m_a} = \sqrt{\sigma_{m_t}^2 + \sigma_{m_v}^2}$.
- 4) Con vaso ed acqua nel calorimetro si misura la variazione di temperatura in funzione del tempo (circa ogni 2 minuti); in questo modo si definisce il tratto \overline{AB} della Fig.2.2.
- 5) Si scalda il corpo in una pentola piena d'acqua posta su un fornello elettrico
- 6) Quando l'acqua bolle si legge t_c (temperatura dell'acqua bollente) poi si introduce il corpo nel calorimetro e si leggono le temperature dell'acqua che si sta scaldando (ogni 3 sec nel tratto \overline{BDI} di Fig.2.2). E' assolutamente necessario **agitare sempre** per interrompere le correnti convettive che porterebbero calore all'esterno. Lo scambio di calore con l'esterno è il più grave dei problemi di cui soffre questo strumento che, a differenza di altri calorimetri, non lavora a temperatura costante.
- 7) Dopo aver raccolto i dati, disegnare l'andamento della temperatura nel calorimetro, come in Fig.2.2. Se non vi fossero stati scambi di calore con l'esterno, il punto D corrisponderebbe alla temperatura θ dell'eq.(2.5); per determinare θ corretta per le dispersioni bisogna prolungare il tratto \overline{DE} verso sinistra in modo che l'intersezione con una parallela all'asse delle temperature dia luogo a due triangoli equivalenti (\widehat{BFG} e \widehat{HDG} in Fig.2.2). La temperatura corrispondente al punto H sarà θ corretta.
- 8) Si calcolano le equazioni (2.5) e (2.6)

DENSIMETRO

Misure di densità

Si definisce *densità assoluta media* (o massa specifica media) il rapporto tra la massa di un corpo e il suo volume:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

In generale la densità in un punto del corpo è data da

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad [g \cdot cm^{-3}].$$

E' comodo per fini pratici definire una *densità relativa* (o semplicemente densità) come il rapporto tra la densità assoluta media di un corpo e quella assoluta media dell'acqua.

La densità relativa è quindi un numero puro, uguale in ogni sistema di unità di misura.

Questa definizione dà esattamente il rapporto tra la massa m del corpo e la massa m_0 di un ugual volume di acqua in condizioni normali:

$$\delta = \frac{m}{m_0} = \frac{\rho_m}{\rho_0}.$$

Un'altra grandezza usata in pratica è il *peso specifico assoluto*, cioè il rapporto tra il peso di un corpo e il suo volume:

$$\Gamma_m = \frac{p}{V}.$$

Direttamente dalla definizione di peso deriva la relazione tra peso specifico assoluto e densità assoluta media $\Gamma_m = g \cdot \rho_m$, che dipende dall'accelerazione di gravità g .

Il *peso specifico relativo* si definisce come il rapporto tra il peso di un corpo e il peso di un ugual volume di acqua distillata, a $4^\circ C$.

$$p_s = \frac{p}{p_0} = \frac{\Gamma}{\Gamma_0}.$$

Il valore di p_s è indipendente da g e coincide con δ .

Le misure di densità variano con lo stato di aggregazione dei corpi in esame.

- 1) Corpi solidi regolari. Si usa la *bilancia* (vedere).
- 2) Corpi solidi irregolari. *Picnometro*, *Bilancia idrostatica*.
- 3) Liquidi. Bilancia di Mohr: si immerge nel liquido un oggetto di volume noto e si misura la spinta di Archimede come diminuzione di peso. Gli oggetti di

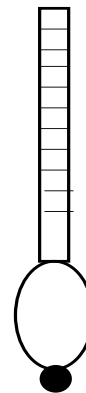
volume noto, detti *Densimetri*, sono usati, anche da soli, senza la bilancia, per misure relative quando la **precisione richiesta non superi le tre cifre decimali**.

Prova di laboratorio

Lo scopo della prova è misurare la densità di un liquido a temperatura ambiente, tramite un densimetro non tarato e due liquidi di densità nota.

Si ha a disposizione

- 1) un cilindro di vetro con acqua distillata
- 2) un cilindro di vetro con alcool etilico (rosso)
- 3) un cilindro di vetro con liquido incognito (verde)
- 4) un densimetro graduato (non tarato)
- 5) un termometro al decimo di °C
- 6) due grafici con la densità dell'acqua e dell'alcool in funzione della temperatura.



Densimetro

La prova viene condotta annotando per prima cosa la temperatura (e l'errore) dei liquidi noti, perchè la densità dipende dalla temperatura; poi, sui grafici in dotazione, si leggono le densità dei due liquidi noti, in funzione della rispettiva temperatura. Successivamente si immerge il densimetro nei tre liquidi e si registra il numero di divisioni immerse. Indicando con x_0, x', x il numero delle divisioni immerse nei liquidi di densità ρ_0, ρ', ρ , le condizioni di equilibrio si hanno quando le spinte di Archimede sono uguali al peso del densimetro. Se V è il volume del densimetro (esclusa la canna graduata) e S la sezione della canna è:

$$p = \rho_0 g(Sx_0 + V)$$

$$p = \rho' g(Sx' + V)$$

$$p = \rho g(Sx + V)$$

da cui, dividendo per S ed eliminando p/S e V/S si ha per ρ

$$\rho = \frac{\rho'}{1 - \frac{\rho_0 - \rho'}{\rho_0} \cdot \frac{x' - x}{x' - x_0}} \quad (3.1)$$

che esprime la dipendenza della densità incognita da quella dei liquidi campione e dagli affondamenti.

Per il calcolo dell'errore è bene riscrivere l'eq.(3.1) come

$$\rho = \frac{\rho' \rho_0 (x' - x_0)}{\rho_0 (x' - x_0) - (\rho_0 - \rho') (x' - x)} \quad (3.2)$$

e calcolare le derivate rispetto alle quantità ρ' , ρ_0 , x' , x_0 , x :

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho'} = \frac{\rho_0^2 (x' - x_0) (x - x_0)}{[\rho_0 (x - x_0) + \rho' (x' - x)]^2} \equiv A$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0} = \frac{\rho'^2 (x' - x_0) (x' - x)}{[\rho_0 (x - x_0) + \rho' (x' - x)]^2} \equiv B$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x'} = \frac{\rho' \rho_0 (x - x_0) (\rho_0 - \rho')}{[\rho_0 (x - x_0) + \rho' (x' - x)]^2} \equiv C$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_0} = -\frac{\rho' \rho_0 (x - x') (\rho_0 - \rho')}{[\rho_0 (x - x_0) + \rho' (x' - x)]^2} \equiv D$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho' \rho_0 (x' - x_0) (\rho_0 - \rho')}{[\rho_0 (x - x_0) + \rho' (x' - x)]^2} \equiv E.$$

Da queste si ottiene:

$$\sigma_\rho = \sqrt{A^2 \sigma_{\rho'}^2 + B^2 \sigma_{\rho_0}^2 + C^2 \sigma_{x'}^2 + D^2 \sigma_{x_0}^2 + E^2 \sigma_x^2}. \quad (3.3)$$

Infine si scrive il risultato nella forma:

$$(\rho \pm \sigma_\rho) g/cm^3$$

Le fasi della prova sono allora:

- 1) Si legge la temperatura di acqua e alcool e si forniscono
 $(t_o \pm \sigma_{t_o})^\circ C;$ $(t' \pm \sigma_{t'})^\circ C.$
- 2) Note le temperature, si leggono, dai grafici, le densità dei liquidi noti (l'errore di lettura é noto e vale 0.0001 g/cm^3)
 $(\rho_o \pm 0.0001) g/cm^3;$ $(\rho' \pm 0.0001) g/cm^3.$
- 3) Si calcola la densità incognita ρ tramite la (3.1) o la (3.2) e il suo errore assoluto tramite la (3.3).

CONTATORE GEIGER

Uno strumento di uso comune per misurare la radioattività è costituito da un condensatore cilindrico, riempito di gas, il cui anodo è un filo teso lungo l'asse del cilindro (Fig.5.1).

Tra gli elettrodi viene applicata una differenza di potenziale con lo scopo di separare gli ioni prodotti dalle radiazioni e produrre una variazione di tensione all'anodo. La ddp che di conseguenza appare ai capi della resistenza R viene inviata tramite il condensatore C all'elettronica di conteggio.

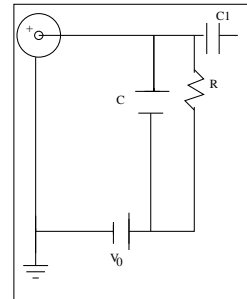


Fig.5.1-Schema di contatore

L'impulso di tensione così prodotto ha composizione ed altezza diverse, in funzione della ddp V_0 applicata al condensatore, come mostrato in Fig.5.2.

Se la tensione è bassa (*camera di ionizzazione*), ogni ione prodotto dalle particelle α e β e dai raggi γ è accumulato sull'elettrodo relativo e l'impulso dipende solo dal numero degli ioni. A questa tensione, però, la ricombinazione degli ioni viene facilitata dalla bassa velocità con cui le cariche di segno opposto si allontanano e quindi l'altezza dell'impulso dipende dalla tensione applicata.

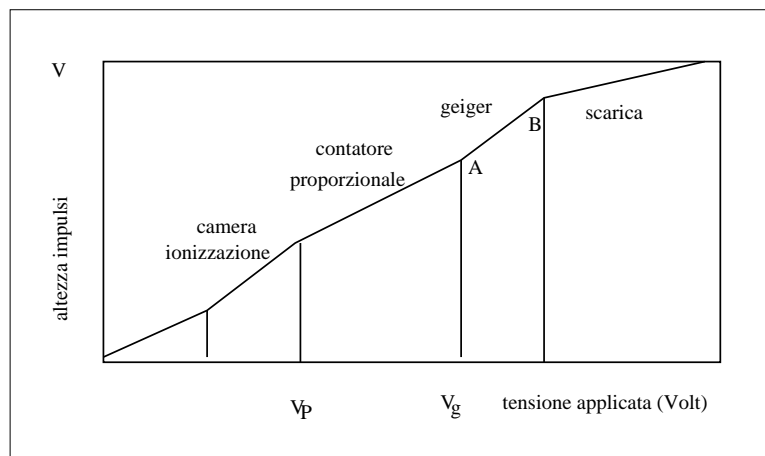


Fig.5.2- Altezza degli impulsi in funzione della tensione

All'aumentare di V_0 gli elettroni (primari) prodotti dalla radiazione hanno abbastanza energia per produrre ionizzazioni secondarie. Se il numero delle coppie di ioni prodotte da ogni elettrone diretto verso l'anodo (coefficiente di amplificazione) è costante, l'impulso prodotto è proporzionale al numero degli ioni primari, ed è ancora possibile distinguere le diverse particelle radioattive. In questa situazione il contatore lavora in *regime proporzionale*.

Aumentando ancora la tensione applicata, l'altezza degli impulsi diviene indipendente dal numero di ioni formati dal fattore ionizzante iniziale e il loro numero dipende debolmente dalla tensione applicata (tratto \overline{AB} in Fig.5.2). Questo è il *regime Geiger*, in cui il fattore di amplificazione è elevato (e quindi sono rivelati anche eventi di debole energia), ma non è possibile distinguere le varie particelle in quanto gli impulsi hanno tutti la stessa altezza.

Al di là del regime Geiger, accanto agli impulsi prodotti dalla ionizzazione primaria si trova un gran numero di impulsi successivi, così da simulare una *scarica continua*.

Prova di laboratorio

La prova comporta una serie di misure in regime Geiger che, come appare da Fig.5.2, è influenzato sia dal regime proporzionale che dalla scarica continua. È necessario allora determinare come prima operazione una tensione di lavoro "ottimale".

Si hanno a disposizione

- Contatore Geiger-Muller con elettronica di alimentazione e di conteggio e timer.
- Sorgente radioattiva Cs^{137} in un contenitore di piombo munito di finestra chiudibile.
- Serie di 5 lastre di piombo, di spessore noto.

Si richiede di determinare

- 1) il pianerottolo e la tensione di lavoro,
- 2) l'efficienza del contatore ai raggi γ del Cs^{137} ,
- 3) il coefficiente di assorbimento del piombo per i raggi γ .

1) pianerottolo e tensione di lavoro

Variando la tensione di 30 V ogni misura, si contano per 1 minuto i colpi s ottenuti con il contenitore aperto. Queste misure vanno fatte fino alla massima tensione consentita dall'alimentatore.

Alla fine si disporrà di una tabella simile alla seguente:

V	s	\sqrt{s}
330	1013	32
360	1128	34
390	1080	33
420	1075	33
450	1102	33
480	1169	34
510	1130	34
540	1206	35
575	1200	35

essendo \sqrt{s} l'errore sui conteggi s che seguono la distribuzione di Poisson.

Si graficheranno poi le colonne $V, s \pm \sqrt{s}$ (Fig.5.3) per verificare in quale intervallo di tensione il numero di colpi è approssimativamente costante rispetto alla tensione applicata. La tensione di lavoro V_L verrà fissata al centro di questo intervallo (nel caso della tabella sopra avrà il valore di 450 V).

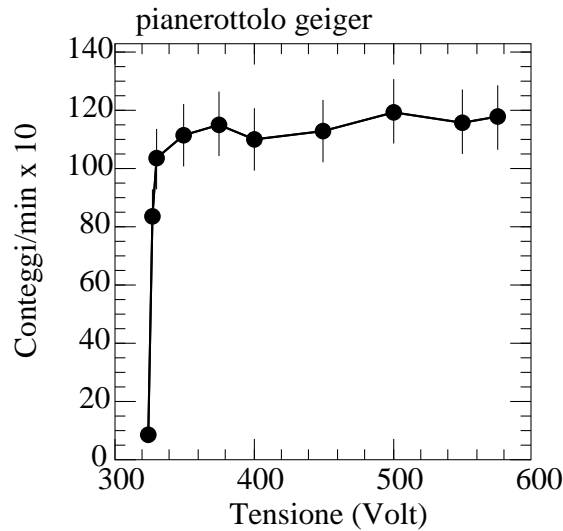


Fig.5.3 - Pianerottolo e tensione di lavoro V_L

2) calcolo dell'efficienza

I conteggi ottenuti in tutte le misure successive (nel caso della determinazione del pianerottolo questo non è necessario) dovranno essere corretti per i conteggi di fondo f (radioattività naturale e artificiale, raggi cosmici), tenendo conto dei rispettivi errori di misura che, come appare dalla tabella, sono dati dalla radice quadrata dei conteggi perchè l'emissione radioattiva segue la statistica di Poisson. La generica correzione dal fondo è:

$$N = s - f \quad e \quad \sigma_N = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2}.$$

Una volta fissata la tensione di lavoro, si predisponga il contatore a lavorare a questa tensione e si proceda al calcolo dell'efficienza.

L'efficienza è, per definizione, il rapporto tra il numero degli eventi contati e il numero di quelli effettivamente prodotti dalla sorgente sotto l'angolo solido Ω e misurabili quindi dal contatore:

$$\epsilon = \frac{s - f}{N_t} = \frac{N}{N_t},$$

essendo, come sopra, N il numero dei colpi corretto per il fondo. La quantità N_t è definita come

$$N_t = n_t \left(\frac{\Omega}{4\pi} \right)$$

con $n_t = 3.7 \cdot 10^{10} \cdot a$ particelle/sec, $a = 10^{-4} Ci \pm 10\%$ (intensità della sorgente), $\Omega = (7.8 \pm 0.3)10^{-2}$ steradiani. Allora

$$\epsilon = \frac{4\pi}{3.7 \cdot 10^{10}} \frac{N}{\Omega a} = K \frac{N}{\Omega a}$$

avendo posto $K = 4\pi/(3.7 \cdot 10^{10})$. Il suo errore è:

$$\sigma_\epsilon = \frac{K}{\Omega a} \sqrt{\sigma_N^2 + \frac{N^2}{\Omega^2} \sigma_\Omega^2 + \frac{N^2}{a^2} \sigma_a^2}.$$

Da notare che nel calcolo dell'efficienza, N va espresso in colpi/sec e non in colpi/min come abitualmente viene fatto. Questo perchè viene confrontato con N_t , espresso in particelle/sec.

3) coefficiente di assorbimento.

La funzione analitica che rappresenta l'assorbimento dei raggi γ da parte di un materiale, in funzione del suo spessore x è, in generale,

$$C(x) = C_0 \cdot e^{-|\mu|x}, \quad (5.1)$$

dove $C(x)$ è il numero di colpi contati dopo aver posto tra sorgente e contatore uno spessore x , C_0 il numero di colpi in assenza di spessori interposti, μ il coefficiente di assorbimento (in mm^{-1}) da determinare. Nel caso concreto della prova di laboratorio, bisognerà tenere conto dei colpi dovuti al fondo, per cui l'eq. (5.1) diventerà:

$$s - f = (s_0 - f)e^{-|\mu|x} \quad \text{cioè} \quad N = N_0 e^{-|\mu|x}, \quad (5.2)$$

$$\text{con } \sigma_N = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_f^2} \quad \text{e} \quad \sigma_{N_0} = \sqrt{\sigma_{s_0}^2 + \sigma_f^2}$$

L'equazione (5.2) può essere linearizzata, facendone il logaritmo naturale, in

$$\ln(N) = \ln(N_0) - |\mu|x \quad \text{oppure} \quad A = B - |\mu|x$$

dalla quale, con il metodo dei **minimi quadrati**, si ricavano B e μ . B (o meglio e^B) è noto, essendo la misura senza spessori interposti, ma ricavarlo tenendo conto di tutte le misure darà in generale un valore più accurato. Il fit (interpolazione) dei minimi quadrati sarà illustrato graficamente da una figura simile alla seguente:

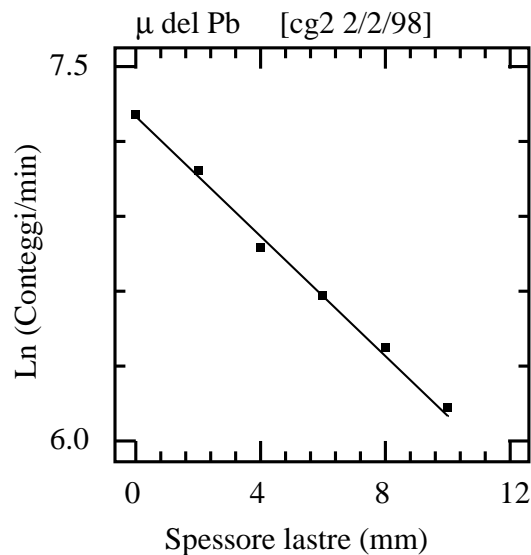


Fig.5.4 - Minimi quadrati per determinare il coefficiente di assorbimento.

Anche gli errori su B e μ si ricavano dai minimi quadrati [equazioni (8.8) e (8.9)].

• L'errore sul parametro N_0 si ricava da $\ln(N_0) = B \rightarrow N_0 = e^B$ e dalla propagazione degli errori: $\sigma_{N_0} = \sqrt{e^{2B} \sigma_B^2} = e^B \sigma_B$.

Si ricorda che, dato $(N \pm \sqrt{N})$, l'errore su $T = \ln(N)$ si calcola dalla propagazione degli errori:

$$T = \ln(N); \quad \sigma_T = \sqrt{(1/N)^2 \cdot \sigma_N^2}$$

Esempio: Se $N = (1394 \pm 38) \text{colpi/min}$, $\sigma_T = \sqrt{5.14 \cdot 10^{-7} \cdot 1394} = 0.03$. Allora $T = (7.24 \pm 0.03) \ln(\text{colpi/min})$.

BANCO OTTICO

Questa esperienza riguarda la misura delle caratteristiche principali delle lenti e dei sistemi ottici centrati, utilizzando le leggi dell'ottica geometrica.

Si ricorda che l'*indice di rifrazione assoluto* n di un materiale è il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto c e nel materiale stesso v ; che l'*indice di rifrazione relativo* o semplicemente l'indice di rifrazione $n_{21} = n_2/n_1$ è il rapporto tra gli indici di rifrazione assoluti del mezzo 2 e del mezzo 1 (generalmente come mezzo 1 viene scelta l'aria il cui indice assoluto è 1.0003)

Una **lente** è un mezzo con indice di rifrazione diverso dall'indice del mezzo circostante e con almeno una delle superfici di separazione curva.

Caratteristiche delle lenti sono la *distanza focale*, distanza tra il vertice della lente e il punto sull'asse di simmetria (asse ottico) verso cui sono deviati i raggi luminosi provenienti da una sorgente puntiforme posta all'infinito (raggi paralleli), il *centro di curvatura* della superficie (o superfici), lo *spessore*. La prova di laboratorio riguarda solo le lenti sottili, per le quali lo spessore può essere trascurato.

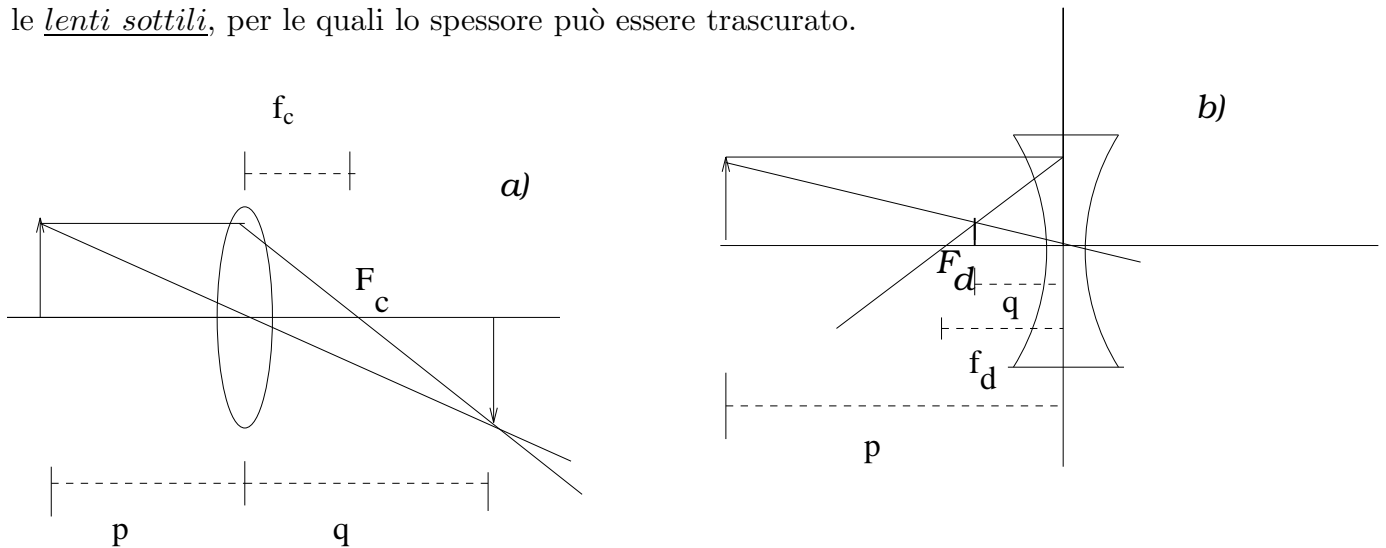


Fig.6.1 - Schema di una lente a) convergente, b) divergente

Per queste lenti vale la seguente **equazione delle lenti sottili**:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad , \quad (6.1)$$

con \underline{p} distanza tra oggetto e lente, \underline{q} distanza tra lente e immagine ed \underline{f} distanza focale. Nel caso in cui due lenti sottili, una convergente e una divergente, siano messe a contatto, si può dimostrare che vale la relazione

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_T}$$

con

$$\frac{1}{f_T} = \frac{1}{f_C} + \frac{1}{f_D}, \quad (6.2)$$

dove f_T è la focale del sistema, f_C è la focale della lente convergente, f_D è la focale della lente divergente.

Se le lenti sono poste a distanza d come in Fig.6.2

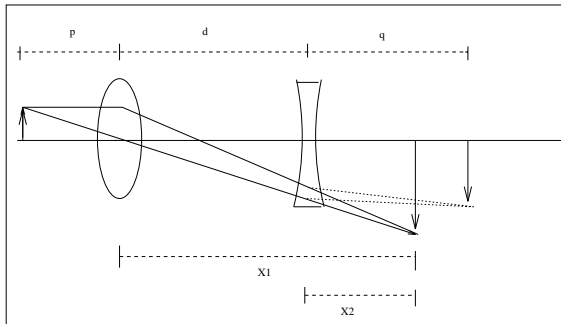


Fig.6.2 - Sistema ottico centrato

varrà il sistema di equazioni

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{X_1} = \frac{1}{f_C} & \text{1.a lente} \\ \frac{1}{X_2} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_D} & \text{2.a lente} \\ X_1 + X_2 = d \end{cases} \quad (6.3)$$

in quanto l'immagine formata dalla prima lente è l'oggetto per la seconda lente.

Prova di laboratorio

Il materiale disponibile:

- lente convergente
- lente divergente
- banco ottico graduato, con sensibilità di lettura 1mm
- portalenti piccolo
- portalenti grande per costruire il sistema ottico
- lampada con condensatore
- schermo

Si chiede di determinare:

- 1) la distanza focale della lente convergente
- 2) la distanza focale della lente divergente

3) la posizione dell'immagine q in un sistema ottico, derivata dal sistema (6.3), la sua verifica sperimentale, misurando q al banco ottico, e il confronto dei risultati.

1) lente convergente

Si disponga il banco ottico come in Fig. 6.1a. Si muova il portalentini fino ad ottenere sullo schermo un'immagine a fuoco della sorgente e si misuri la distanza sorgente–lente (p) e la distanza lente–schermo (q). Allora dall'eq. (6.1)

$$f_C = \frac{pq}{p+q} \quad (6.4)$$

$$\sigma_{f_C} = \frac{1}{(p+q)^2} \sqrt{q^4 \sigma_p^2 + p^4 \sigma_q^2} \quad (6.5)$$

2) lente divergente

La lente divergente (che, si ricorda, ha distanza focale negativa) produce un'immagine virtuale che non compare sullo schermo e sulla quale non possono essere fatte misure. Questa lente verrà quindi usata *a contatto* con la lente convergente, in modo da avere un'immagine reale prodotta dal sistema ottico centrato sottile del quale sia possibile misurare la distanza focale f_T come al punto 1). Utilizzando l'eq.(6.2) sarà:

$$f_D = \frac{f_T f_C}{f_C - f_T} \quad (6.6)$$

e

$$\sigma_{f_D} = \frac{1}{(f_C - f_T)^2} \sqrt{f_C^4 \sigma_{f_T}^2 + f_T^4 \sigma_{f_C}^2} \quad (6.7)$$

3) sistema ottico non sottile

Utilizzando il portalentini di dimensioni maggiori, si disponga il banco come in Fig.6.2, con la lente convergente rivolta verso la sorgente luminosa. La distanza tra le lenti è $d = (9.6 \pm 0.1) \text{ cm}$.

Dopo aver messo a fuoco l'immagine sullo schermo, si misuri la distanza q_s tra la lente divergente e lo schermo.

Il valore teorico di q , derivato dal sistema (6.3) è:

$$q_T = f_D \frac{p f_C - p d + d f_C}{p f_C + p f_D - f_C f_D - p d + d f_C}. \quad (6.8)$$

Il suo errore σ_q , ricavato dalla propagazione degli errori,

$$\frac{\partial q}{\partial f_D} = \frac{[p d - f_C (p + d)]^2}{(p f_C + p f_D - f_C f_D - p d + d f_C)^2} \equiv A$$

$$\frac{\partial q}{\partial f_C} = \frac{p^2 f_D^2}{(pf_C + pf_D - f_C f_D - pd + df_C)^2} \equiv B$$

$$\frac{\partial q}{\partial p} = \frac{f_C^2 f_D^2}{(pf_C + pf_D - f_C f_D - pd + df_C)^2} \equiv C$$

$$\frac{\partial q}{\partial d} = \frac{-f_D^2 (p - f_C)^2}{(pf_C + pf_D - f_C f_D - pd + df_C)^2} \equiv D$$

è:

$$\sigma_q = \sqrt{A^2 \sigma_{f_D}^2 + B^2 \sigma_{f_C}^2 + C^2 \sigma_p^2 + D^2 \sigma_d^2}. \quad (6.9)$$

Per il confronto tra i due valori della posizione dell'immagine si utilizzi il *test statistico*, come brevemente richiamato nel paragrafo successivo.

Verifica della consistenza dei risultati (*test statistico*)

Una volta ottenuti i risultati teorico e sperimentale, con i rispettivi errori, essi devono essere confrontati per giudicarne la compatibilità.

Si userà un *test di significatività per distribuzioni normali*, applicato al confronto tra valori medi, per verificare l'ipotesi nulla

$$H_0 : V_1 - V_2 = d = 0$$

(con V_1 e V_2 valori da confrontare).

Le proprietà della *differenza* $V_1 - V_2$ di due variabili aleatorie indipendenti sono, brevemente,

- Il valore di aspettazione della differenza è uguale alla differenza dei valori di aspettazione.

- La varianza della differenza è uguale alla somma delle varianze.

- Se V_1 e V_2 derivano da una distribuzione normale con parametri V_1, σ_1 e V_2, σ_2 , la differenza $V_1 - V_2$ segue ancora una legge normale con parametri $V_1 - V_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \equiv \sigma_{V_1 - V_2}$.

Fissato un livello di significatività α (cioè la massima probabilità con cui siamo disposti a rigettare un'ipotesi che invece andava accettata) e definita la *variabile standardizzata* (di media 0 e varianza 1)

$$z = \frac{V_1 - V_2}{\sigma_{V_1 - V_2}},$$

la regione di accettazione dell'ipotesi H_0 è:

$$-z_{\alpha/2} < z < +z_{\alpha/2}.$$

Quindi se la differenza $V_1 - V_2$ si trova all'interno di questo intervallo, l'ipotesi H_0 (V_1 e V_2 sono uguali) viene considerata vera entro il livello di confidenza $(1 - \alpha)$.

Esempio: *Supponiamo di aver calcolato e misurato, rispettivamente*

$$V_1 = (0.225 \pm 0.001)m \quad V_2 = (0.229 \pm 0.003)m.$$

Sarà:

$$V_1 - V_2 = 0.004 \text{ m} \quad \sigma_{V_1 - V_2} = \sqrt{10^{-6} + 9 \cdot 10^{-6}} = 3.16 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

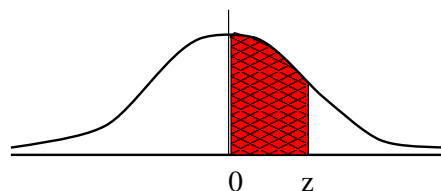
e il loro rapporto varrà 1.265.

Al livello di significatività $\alpha = 0.01$, dalle aree sotto la curva normale (v. Tabella I), si ha $z_{0.005} = 2.58$. Allora

$$-2.58 < 1.265 < +2.58.$$

Quindi i due valori di V_1 e V_2 possono essere considerati uguali con una probabilità di sbagliare dell'1% (ovvero al livello di confidenza del 99%).

**Aree sotto la curva
normale standard
tra 0 e z**



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0754
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2258	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2996	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

